Le 11 juin 2020

Chers élèves,

Je reviens vers vous avec les exercices sur la loi normale, dernière matière de l'année.

J'ai ajouté page 7 de ce document les explications pour utiliser Geogebra lorsque vous devez utiliser la loi binomiale ou normale. Cela vous permet notamment pour la binomiale de gagner du temps de calculs.

La semaine prochaine je terminerai avec des exercices d'approximation de la loi binomiale par la loi normale et je vous donnerai des exercices de synthèse qui englobent toute la matière vue en probabilités. Ce sera alors la fin de l'année scolaire. Nous aurons finalement vu toute la matière mis à part le chapitre sur la statistique à 2 variables qui devait être vu en 5° mais ce n'est pas très difficile et je vous joindrai le cours que vous pourrez voir seul ou que vous pourrez consulter lorsque cette matière sera vue dans le supérieur.

Bonne continuation !

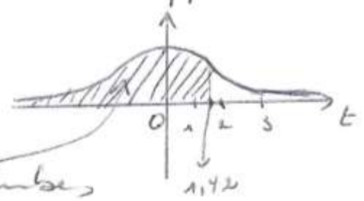
M.Bottin

Solution des exercices sur la loi normale

Pour les exercices à partir du 11) il faut se munir des tableau qui se trouve dans la théorie page 20

11) a) $p(X \le 1,42) = ?$

Pour répondre à la question, il faut dessiner approx. la courbe de Gauss qui ressemble à ceci:



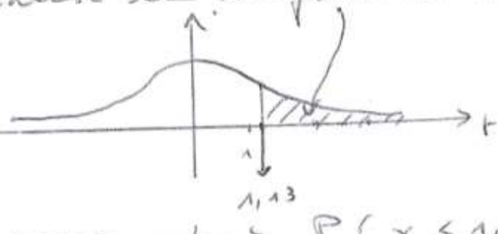
$P(X \le 1,42)$ ou $P(X < 1,42)$ représente l'aire de la surface comprise entre la courbe, l'axe ox et la droite d'équation $t = 1,42$

On dessine la surface en question et la probabilité se lit directement dans la table (dans ce cas-ci)

Dans la 1^re colonne de la table se trouvent les différentes valeurs de t par dixièmes donc on cherche 1,4 et dans la 4^e colonne (0,02) à l'intersection avec la ligne $t = 1,4$, on trouve 0,9222. Donc $p(X \le 1,42) = 0,9222$

b) $p(X \ge 1,13) = ?$

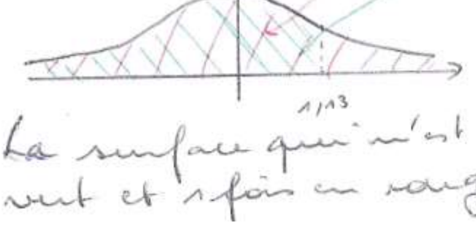
A chaque fois, on visualise la surface en dessinant la courbe de Gauss.



Ici il faut procéder en revenant à $P(x \le 1,13)$ car c'est cette probabilité que l'on peut lire dans la table. Or on sait que l'aire sous la courbe vaut 1.

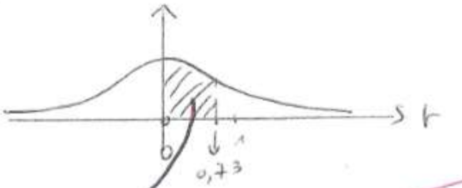
Donc $p(X \ge 1,13) = 1 - p(X \le 1,13) = 1 - 0,8708 = 0,1292$

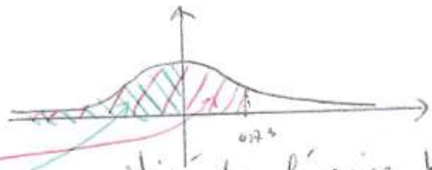
ds la table en procédant comme au a)



La surface qui n'est pas hachurée 2 fois (1 fois en vert et 1 fois en rouge) est la surface cherchée.

c) $P(0 \leq X \leq 0,73) = \ ?$



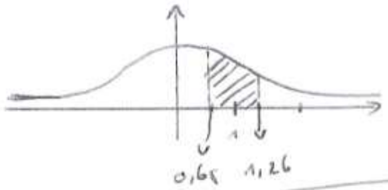


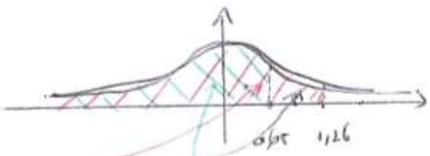
moitié de l'aire totale sous la courbe.

$$P(0 \leq X \leq 0,73) = P(X \leq 0,73) - 0,5$$

$$= 0,7673 - 0,5 = 0,2673$$

d) $P(0,65 \leq X \leq 1,26) = \ ?$





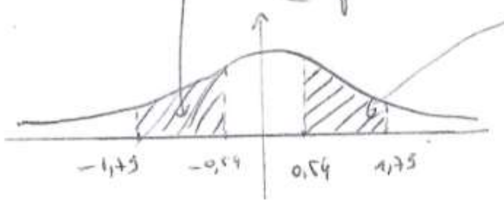
$$P(0,65 \leq X \leq 1,26) = P(X \leq 1,26) - P(X \leq 0,65)$$

$$= 0,8962 - 0,7422$$

$$= 0,1540.$$

e) $P(-1,79 \leq X \leq -0,54) = \ ?$

La courbe étant symétrique par rapport à oy (fct paire) l'aire cherchée peut être remplacée par son symétrique par rapport à oy et faisant ainsi intervenir des valeurs positives de t (pour la table)



Donc $P(0,54 \leq X \leq 1,79) = P(X \leq 1,79) - P(X \leq 0,54)$ (voir d))

$$= 0,9633 - 0,7054$$

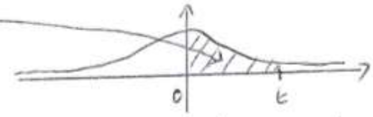
$$= 0,2579.$$

12) a) $p(X \leq t) = 0,7967.$

On va procéder à l'envers de l'ex. 11). On va chercher dans la table la valeur 0,7967 qui se trouve à l'intersection de la ligne 0,8 et la colonne 0,03

Donc $t = 0,83$

b) $p(0 \leq X \leq t) = 0,4236.$



Ici on ne peut lire directement la valeur de t comme dans le a). Il faut transformer la surface donnée pour qu'elle fasse intervenir $p(X \leq t)$ qui est elle donnée dans la table.

En comparaison avec l'ex. 11), on peut dire que

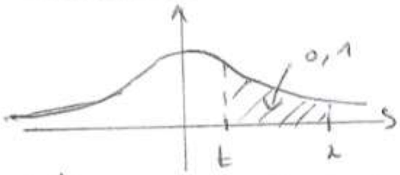
$p(0 \leq X \leq t) = p(X \leq t) - 0,5$ (voir 11) c))

donc $p(X \leq t) = p(0 \leq X \leq t) + 0,5$

$= 0,4236 + 0,5 = 0,9236$

A l'intersection de la ligne 1,4 et de la colonne 0,03 on trouve 0,9236. Donc $t = 1,43$

c) $p(t \leq X \leq 2) = 0,1$



En comparaison avec l'ex. 11), on peut dire que

$p(t \leq X \leq 2) = p(X \leq 2) - p(X \leq t)$

donc $p(X \leq t) = p(X \leq 2) - p(t \leq X \leq 2)$

$= 0,9772 - 0,1 = 0,8772$

A l'intersection de la ligne 1,1 et de la colonne 0,06 on trouve la valeur 0,8770 qui est la plus proche de 0,8772 puisque la suivante est 0,8790.

Donc $t \simeq 1,16$

13) Les valeurs données dans la table page 20 concernent la loi normale centrée réduite pour laquelle $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. (μ = moyenne et σ = écart-type)
voir 4°
Ici la durée de vie des appareils obéit à la loi normale pour laquelle $\mu = 6$ et $\sigma = 2$

Pour pouvoir utiliser la table il faut donc utiliser le changement de variable $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ (p 18) qui permet alors de ramener $N(\mu, \sigma)$ à $N(0, 1)$

a) On cherche $p(X \leq 1{,}5)$
↳ garantie

Effectuons le changement de variable $t = \frac{x - \mu}{\sigma}$ avec $x = 1{,}5$

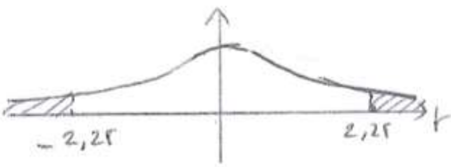
donc $t = \frac{1{,}5 - 6}{2} = -2{,}25$.

Donc $p(X \leq 1{,}5) = p(Z \leq -2{,}25) = p(Z \geq 2{,}25)$

$= 1 - p(Z \leq 2{,}25)$ (voir 11) b))

$= 1 - 0{,}9878$

$= 0{,}0122 = 1{,}22\,\%$.



On remplacera donc 1,22 % des appareils.

b) 1°) On cherche $p(X \geq 10) = p(X > 10)$ donc qu'on mette $\geq$ ou $>$ cela revient au même car la prob. que $p(X = 10)$ est nulle.

Changement de variable : $t = \frac{10 - 6}{2} = 1{,}5$ ou

Donc $p(X > 10) = p(Z > 1{,}5) = 1 - p(Z < 1{,}5) = 1 - 0{,}9332$
$= 0{,}0228$

2°) On cherche $p(4 \leq X \leq 7)$

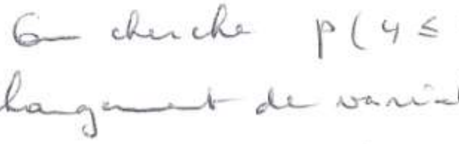
Changement de variable : $t_1 = \frac{4 - 6}{2} = -1$ et $t_2 = \frac{7 - 6}{2} = 0{,}5$

Donc $p(4 \leq X \leq 7) = p(-1 \leq Z \leq 0{,}5) = p(0 \leq Z \leq 1) + p(0 \leq Z \leq 0{,}5)$

$= p(Z \leq 1) - 0{,}5 + p(Z \leq 0{,}5) - 0{,}5$

$= 0{,}8413 + 0{,}6915 - 1$

$= 0{,}5328$



3°] On cherche $p(X > 20)$

Changement de variable : $t = \frac{20-6}{2} = 7$

Donc $p(X>20) = p(Z>7) = 0.$

c) En comparant avec a) où la garantie était de 1,5 ans ce qui correspondait à un remplacement de 1,22% des appareils, on peut en déduire que ;

$P(X \leq x_1) = 0{,}063$ et que l'on cherche x_1

Comme $p(X \leq x_1) = p(Z \leq t_1)$ avec t_1 négatif (voir a))

$= p(Z \geq t_2)$ avec $t_2 = -t_1$

$= 1 - p(Z \leq t_2)$

on a donc $0{,}063 = 1 - p(Z \leq t_2)$

$p(Z \leq t_2) = 1 - 0{,}063 = 0{,}937$

On procède alors comme à l'ex. 13) et on cherche dans la table la valeur la plus proche de 0,937 et on trouve pile poil $t_2 = 1{,}53$ donc $t_1 = -1{,}53$

On procède alors au changement de variable :

$t_1 = \frac{x_1 - 6}{2} \Leftrightarrow x_1 = 2t_1 + 6 = 2.(-1{,}53) + 6 = 2{,}94$

On accordera donc une garantie de 2,94 ans ($\simeq$ 3 ans)

Pour appliquer je vous conseille de réaliser les exercices 16) puis 15) et 17). Je reviendrai la semaine prochaine sur l'ex 14) où on utilise une approximation de la loi binomiale par la loi normale car la loi binomiale demande trop de calculs.

Maintenant avec les calculatrices genre TInspire CAS on peut sans problème effectuer ces calculs.

Avec Geogebra aussi !

Utilisation de Geogebra pour les lois binomiale et normale.

A l'ouverture de Geogebra vous êtes sur une page graphique

Cliquer sur $\boxed{\equiv}$ dans le coin supérieur droit

" sur Affichage puis Calculs de probabilités

1°) Se dessine à l'écran la courbe de Gauss où $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ (loi normale centrée réduite)

• Dans le cas de l'exercice 11) vous gardez $\mu = 0$ et $\sigma = 1$

a) Vous cliquez sur le crochet $\boxed{]}$, vous tapez 1,42 et s'affiche 0,9222 automatiquement.

b) $p(X \geq 1,3)$ vous cliquez sur le crochet $\boxed{[}$ et hop !

c) $p(0 \leq X \leq 0,73)$ vous cliquez sur les crochets $\boxed{[\ ]}$ vous entrez 0 et 0,73 et s'affiche 0,2673.

d) e) idem que c).

• Dans le cas de l'exercice 13), vous changez $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ en $\mu = 6$ et $\sigma = 2$

Plus besoin de passer par le changement de variable

Vous sélectionnez les bons crochets et vous tapez les valeurs correspondantes à l'énoncé et hop !

2°) Pour la loi binomiale, vous cliquez sur l'onglet $\boxed{\text{Normale} \blacktriangledown}$ et vous sélectionnez Binomiale.

Vous entrez n et p et vous avez dans le tableau à droite de l'écran toutes les valeurs de $p(X = k)$ jusque $k = 20$. Donc si $k > 20$ il faudra utiliser l'approx. de la loi bin. par la loi normale.

Pas avec TI nspire CAS.